http://science6.2ch.net/test/read.cgi/math/1143445456/

よく話題になる確率の問題を集めてみる

■問題編

1：１３２人目の素数さん：2006/03/27(月) 16:44:16
過去数学板では一つの問題で数百レスも稼ぐような問題が結構ありました。
その殆どが確率の問題。それらを記念に集めてみよう。

【問１】　1つ目。

1 名前：番組の途中ですが名無しです 投稿日：04/03/28 21:17 ID:k+MApueJ
ジョーカーを除いたトランプ５２枚の中から１枚のカードを抜き出し、
表を見ないで箱の中にしまった。
そして、残りのカードをよく切ってから３枚抜き出したところ、
３枚ともダイアであった。
このとき、箱の中のカードがダイヤである確率はいくらか。

答えが１／４ってのは納得出来ない！
１０／４９だろ！！

【問２】　2つ目。

1 名前：1 投稿日：02/12/22(日) 16:05
３人の囚人A、B、Cの内、２人までが処刑され、
１人は釈放されることになっている。

Aは看守に尋ねた。
「B、Cの内、少なくとも１人は処刑されるわけだから、
どちらが処刑されるか教えてくれないか？」

すると看守はこう答えた。
「Ｂは処刑されるよ。」

Aは少しホッとした。
自分が処刑される確率が２／３≒６６．６％から１／２＝５０％に
減ったと思ったからだ。

看守はウソをつかないものとして、
本当にAが処刑される確率は減ったのだろうか？

【問３】　3つ目。

ドアの向こうの賞品
アメリカのクイズ番組で実際にあったコーナーです。
最後に勝ち残った人が 3 枚のドアから１枚だけ選びます。
どれか 1 枚の後ろに賞品があって、当たればもらえるということです。

番組の司会者はどのドアの向こうに賞品があるか知っています。
参加者が選んだところで、司会者が残りの 2 枚のうちはずれを 1 枚開けて、
「良かったらドアを変えてもいいですよ」と言います。

さて、ここで参加者は自分の選んだドアを開けるべきでしょうか、
それとも変えるべきでしょうか？
あるいは変えても、そのままでも関係ないのでしょうか？

はずれの 1 枚が開かれたところで、残りは 2 枚。
それぞれが当たりの確率は同じでしょうか？

【問４】　4つ目。

2つの封筒の問題と呼ばれる

ここにお金の入った封筒が2つある.
一つの封筒には他方の倍のお金が入っている
（言い方を変えると，一つの封筒には他方の半分のお金が入っている）.
但し，いくら入っているかは分からない.

あなたは，2つの封筒のうち，どちらか一つを選び，なかのお金をもらえる.
あなたが，一つ選んだところ10,000円が入っていた.

ここで，「あなたが望むなら，もう一つの封筒と替えても良いですよ」と言われる.
さて，問題は「替えるほうが得か，替えないほうが得か」だ.

◆　◆　◆

■解答編 by Y.Oz (Y.Oz Vox)

【問１】　1つ目。

1 名前：番組の途中ですが名無しです 投稿日：04/03/28 21:17 ID:k+MApueJ
ジョーカーを除いたトランプ５２枚の中から１枚のカードを抜き出し、
表を見ないで箱の中にしまった。
そして、残りのカードをよく切ってから３枚抜き出したところ、
３枚ともダイアであった。
このとき、箱の中のカードがダイヤである確率はいくらか。

答えが１／４ってのは納得出来ない！
１０／４９だろ！！

◇　◇　◇

A: 1枚目にダイヤの出る事象
B: 2～4枚目がすべてダイヤ（1枚目は不問）である事象　とすると、

求める条件付確率は、$P_B(A)$で表される。

1枚目がダイヤで
2～4枚目もダイヤの確率　$\frac{13}{52}\times\frac{12}{51}\times\frac{11}{50}\times\frac{10}{49}$

1枚目がダイヤ以外で
2～4枚目がダイヤの確率　$\frac{39}{52}\times\frac{13}{51}\times\frac{12}{50}\times\frac{11}{49}$

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{13}{52}\times\frac{12}{51}\times\frac{11}{50}\times\frac{10}{49}}{\frac{13}{52}\times\frac{12}{51}\times\frac{11}{50}\times\frac{10}{49} + \frac{39}{52}\times\frac{13}{51}\times\frac{12}{50}\times\frac{11}{49}}$$

$$= \frac{10\times\frac{13\times12\times11}{52\times51\times50\times49}}{(10+39)\times\frac{13\times12\times11}{52\times51\times50\times49}} = \frac{10}{10+39} = \frac{10}{49}$$ __//

▼条件付確率について

普通のさいころを1つ投げたとき、1の目が出る確率は1/6、これは当たり前です。

条件付確率とは、例えば、この『さいころを1つ投げる。この試行を何千回、何万回と繰り返し、「奇数の目が出たときだけを考えて（偶数だった場合は、無かったことにする）」1の目が出る確率を求めよ』、というような問題のことです。この場合ですと、1、3、5の目が出たときだけを対象にする（それ以外は、結果を捨てる）ので、1の目が出る確率は1/3と言えます。

この1つ目の問題も、これの変形です。『ジョーカーを除いた52枚のトランプから1枚ずつカードを4枚まで引いていく。この順に4枚引く試行を何千回、何万回と繰り返し、「2～4枚目がすべてダイヤだったときだけ考えて（そうじゃなかった場合は、無かったことにする）」1枚目がダイヤである確

率を求めよ』、という具合に書き換えることができます。

「1枚目がダイヤ以外、2〜4枚目がダイヤ」の場合の数は「39×13×12×11」（スペード・クラブ・ハートの総枚数は13×3 = 39枚）、「1〜4枚目すべてがダイヤ」の場合の数は「13×12×11×10」です。つまり、（1枚目は不問かつ）2〜4枚目がダイヤである場合の数は、「39×13×12×11 + 13×12×11×10 = (39 + 10)×13×12×11 = 49×13×12×11」となります。このうち、1枚目もダイヤなのは「13×12×11×10」ですから、確率は次のようになります。

$$P_B(A) = \frac{13\times12\times11\times10}{49\times13\times12\times11} = \frac{10}{49}$$ __//

【問２】　2つ目。

1 名前：1 投稿日：02/12/22(日) 16:05
３人の囚人A、B、Cの内、２人までが処刑され、
１人は釈放されることになっている。

Aは看守に尋ねた。
「B、Cの内、少なくとも１人は処刑されるわけだから、
どちらが処刑されるか教えてくれないか？」

すると看守はこう答えた。
「Ｂは処刑されるよ。」

Aは少しホッとした。
自分が処刑される確率が２／３≒６６．６％から１／２＝５０％に
減ったと思ったからだ。

看守はウソをつかないものとして、
本当にAが処刑される確率は減ったのだろうか？

◇　◇　◇

処刑される確率が等しいとすると、AB処刑が1/3、ACも1/3、BCも1/3のはず。

看守の答え方を考えると、

1) AB処刑の場合(1/3) …… 看守はBと答える。

2) AC処刑の場合(1/3) …… 看守はCと答える。

3) BC処刑の場合(1/3) …… この場合、看守はBと答えてもCと答えてもかまわないが、1/2ずつの確率でBまたはCと答えるとすると、Bと答えるのが1/3×1/2=1/6、Cと答えるのも1/3×1/2=1/6となる。

E: Aが処刑される事象
F: 看守がBと答える事象　とすると、

求める条件付確率は、$P_F(E)$で表される。

$$P_F(E) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)} = \frac{1/3}{1/3 + 1/6} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$$ __//

▼これが6つのパラレルワールドで均等に起こったとする

AB処刑が2つ（看守はBと答える）、
AC処刑も2つ（看守はCと答える）、
BC処刑も2つ（この場合、Bと答えてもCと答えても良いので、均等だと考えると、一方の看守はBと答え、もう一方はCと答える）
となるはずです。

結果、看守がBと答えたPWは、AB処刑が2つと、BC処刑が1つになります。

ということで、やはりAが処刑される確率は、看守がBと答えるPW3つのうちで、AB処刑が2つですから、2/3のままということになります。

【問３】　3つ目。

ドアの向こうの賞品
アメリカのクイズ番組で実際にあったコーナーです。
最後に勝ち残った人が 3 枚のドアから１枚だけ選びます。
どれか 1 枚の後ろに賞品があって、当たればもらえるということです。

番組の司会者はどのドアの向こうに賞品があるか知っています。
参加者が選んだところで、司会者が残りの 2 枚のうちはずれを 1 枚開けて、
「良かったらドアを変えてもいいですよ」と言います。

さて、ここで参加者は自分の選んだドアを開けるべきでしょうか、
それとも変えるべきでしょうか？
あるいは変えても、そのままでも関係ないのでしょうか？

はずれの 1 枚が開かれたところで、残りは 2 枚。
それぞれが当たりの確率は同じでしょうか？

◇　◇　◇

ABC、Aのドアが当たりだとする。

最初に当たりを選ぶ確率は1/3。

先に選んだドアから替えた場合の当たる確率は、

1) Aを選んだ場合(1/3) …… 1/2ずつの確率で、
　ｱ) 司会者は「Bがはずれ」だと教えてくれる → Cを選ぶ → はずれ。
　ｲ) 司会者は「Cがはずれ」だと教えてくれる → Bを選ぶ → はずれ。
　ということで、ｱ)ｲ)のどちらの場合もはずれ。

2) Bを選んだ場合(1/3) …… 司会者が「Cがはずれ」だと教えてくれる → Aを選ぶ → 当たる。

3) Cを選んだ場合(1/3) ……　　〃　　「Bがはずれ」　〃　　　→ Aを選ぶ → 当たる。

1/3の確率ではずれ(1-ｱ,ｲ)、2/3の確率で当たる(2,3)ことになる。

以上より、変更しない = 1/3、ドアを替える = 2/3で、替えた方が有利となる。__//

▼もし司会者がはずれを開けなかったら

問題では司会者がはずれのドアを見せた上で、最初に選んだドアと最後に残ったドアと替えますか？と聞いています。

ここで、もし司会者が「最初に選んだドアと、残った2枚のドア（2枚とももらえる）とを替えてもいいですよ」と言ってきたらどうします？　この場合は、1枚選べるか、2枚選べるかの比較ですから、明らかに2枚選べる方が2倍有利なのは言うまでもありません。

参加者が当たりを引いたのを見て、司会者が意地悪して、はずれを引かせてやろうとしてこんな発言をしている、って勘ぐるのは無しですよ。参加者が当たりを引こうがはずれを引こうが関係なく、この発言をすると考えてください。

この問題に掲げられている「司会者がはずれの1枚を見せた上で……」も、実は「1枚と2枚の選択」と同じなんです。

元々当たりを引いていた場合(確率1/3)は、残りの2枚（いずれもはずれ。結果、はずれ）との交換になります。元々はずれていた場合(確率2/3)は、残りの2枚（当りとはずれが1枚ずつ。結果、当たり）との交換です。

問題では残り2枚のうちのはずれ1枚を見せてもらうことになっていますが、残り2枚の内少なくとも1枚ははずれなのは当たり前なので、元々当たりはずれを知っている司会者が、はずれを1枚見せるのはその当たり前のことをしているに過ぎず、確率的な意味は全く無いといえます。

ですから、替えるほうが2倍有利ということになります。1/3 → 2/3 __//

▼ドアが100個あって1つが当たり。1つ選ぶと、司会者が98個のはずれを教えてくれた上で「ドアを替えても良い」と言う。替えた方が良いのか？　という問題の場合

D1,D2,D3,……,D99,D100の内、D1が当たりだとする。

最初から当たりを選ぶ確率は1/100。

先に選んだドアから替えた場合の当たる確率は、

1) D1を選んだ場合 …… 元々当たっているのだから、どれに替えてもはずれとなる。

2) D2を選んだ場合 …… 司会者が「(当たりである)D1と、先に選んだD2以外の、98個のはずれ」を教えてくれる。 → D1を選ぶことになるので当たる。

3) D3を選んだ場合 …… 司会者が「(当たりである)D1と、先に選んだD3以外の、98個のはずれ」を教えてくれる。 → D1を選ぶことになるので当たる。

：　：　：　：　：

100) D100を選んだ場合 …… 司会者が「(当たりである)D1と、先に選んだD100以外の、98個のはずれ」を教えてくれる。 → D1を選ぶことになるので当たる。

以上より、先にD1を選んでいた場合(1/100)のみはずれになり、それ以外(99/100)は当たりになる。もちろん、替えた方が有利である。__//

ドア3つの場合は微妙かもしれませんが、これだけドアが多いと、直感的にも絶対替えた方が有利ですよね。

【問４】　4つ目。

2つの封筒の問題と呼ばれる

ここにお金の入った封筒が2つある.
一つの封筒には他方の倍のお金が入っている
（言い方を変えると，一つの封筒には他方の半分のお金が入っている）.
但し，いくら入っているかは分からない.

あなたは，2つの封筒のうち，どちらか一つを選び，なかのお金をもらえる.

あなたが，一つ選んだところ10,000円が入っていた.

ここで，「あなたが望むなら，もう一つの封筒と替えても良いですよ」と言われる.
さて，問題は「替えるほうが得か，替えないほうが得か」だ.

◇　◇　◇

x円と2x円の入った封筒だとする。

1) x円の方を選んでいた場合(1/2) …… 替えると2x円になり、元の2倍となる。

2) 2x円の方を選んでいた場合(1/2) …… 替えるとx円になり、元の1/2倍となる。

最初の封筒に入っていた金額をα円とすると、封筒を替えた場合の期待値は、

$$2\alpha \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}\alpha$$

となり、この金額はαよりも大きい（α≧0）ので、交換した方が得ということになる。__//

▼実際に最初に開けた封筒に1万円が入っていた場合、

1) 5千円、1万円の内の1万円を引いていた場合(1/2) …… 替えると5千円になってしまう。

2) 1万円、2万円の内の1万円を引いていた場合(1/2) …… 替えると2万円になる。

確率はともに1/2で同じなので、交換した場合、平均をとる(いわゆる期待値)と、(5,000 + 20,000)÷2 = 12,500で、元の1万円よりも2,500円アップする。だから、替えた方が得。__//

これが答なんだけど、確率的にはその通りでも、実際に5千円になってしまったら損をしたと感じるだろうし、2万円もらえたら嬉しいだろうし。

この答が感覚的に変だと思う人は多いでしょうね。増えるか減るかで考えたら、元よりも増えるのが1/2、減るのが1/2ですから、単に半々ですからね。ただ、減った場合は5,000円のマイナスで済むのに、増えた場合は10,000円ものプラスになるんで、どうせ増える減るの確率が半々なのであれば、たくさん増えるか少し減るかのどっちにしようか悩んで、たくさん増える方にかけるのがお得かな、ってことなんですね。

まぁ、最初の封筒を開けたら1万円入ってたという人が1,000人いたら、そのうち500人ほどは5,000円に減ってがっかりするし、残りの500人ほどは20,000円になってラッキーだし、ってことになる訳で、いずれにしても、さっきの期待値計算で出てきた10,000円→12,500円の、12,500円もらって2,500円得しました!!って人は存在しないんですよね。さっきの1,000人が実在したなら、5,000×500+20,000×500=1,2500,000でトータル1,250万円、これを1,000人で割って平均12,500円になるんですが。

大数の法則から言って、「この封筒がたくさ〜んもらえるのなら交換した方が得」ってことですが、1枚しかもらえないなら個人のカンに頼る方が良かったりして（←これは数学とは言わない）。